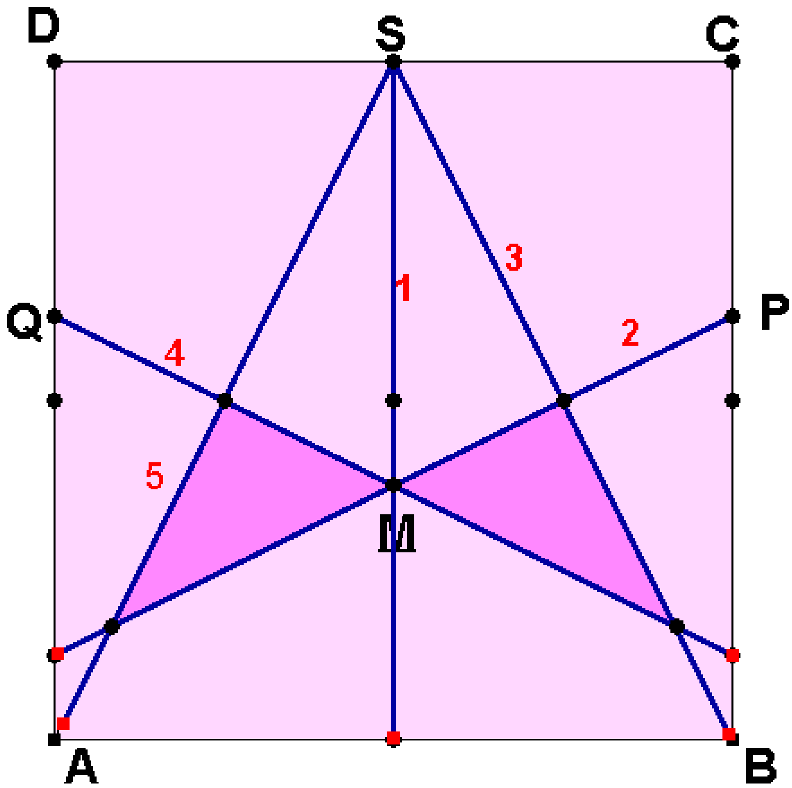
Die goldenen Linien auf dem Geobrett und das ägyptische Dreieck

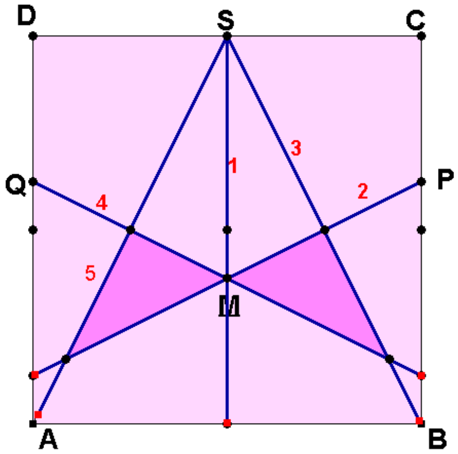


Horst Steibl
TU Braunschweig
GDM-Tagung
Berlin 2007

diverlag
franzbecker

Die goldenen Linien auf dem Geobrett und das ägyptische Dreieck

Wie Tim und Tom, die Winkelwichtel, helfen, den Durchblick zu behalten

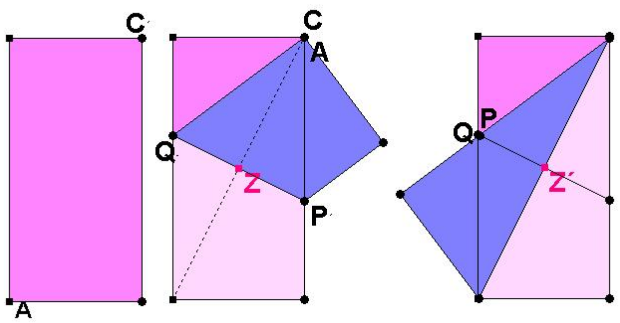


Die Aufgabe

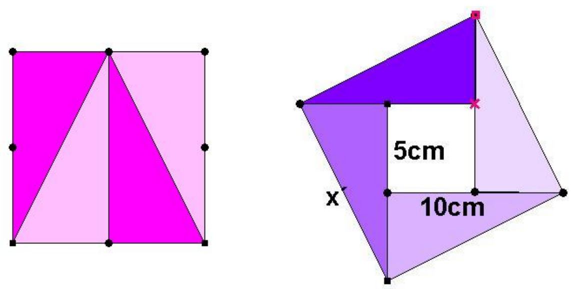
Falten Sie in einem quadratischen Blättchen die gezeichneten Linien exakt durch Punkt-auf-Punkt-Faltung.
Die Nummerierung gibt die Reihenfolge der Faltungen an.
Beweisen Sie, dass die dunkler gefärbten Dreiecke ägyptische (3, 4, 5)-Dreiecke sind.
Erlaubte Hilfsmittel: Winkelsumme im Dreieck, Strahlensätze, Ähnlichkeit,

Hinführung: die goldenen Linien im Quadrat

Halbiert man ein Quadrat längs einer Mittellinie, so erhält man zwei Rechtecke, deren lange Seiten doppelt so lang sind wie die kurzen. Man bezeichnet ein solches Rechteck auch als ***Doppelquadrat***.



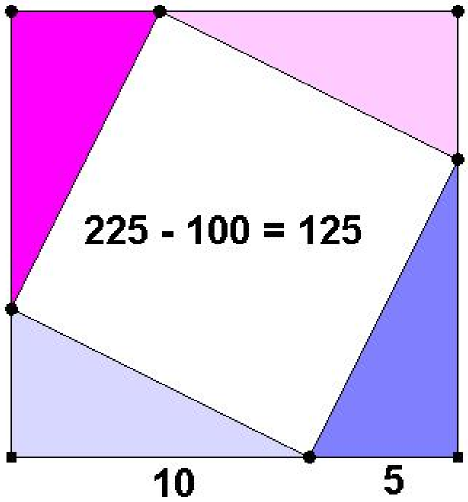
Um in einem Rechteck die Diagonale falten zu können, bringt man zunächst Ecke auf Gegenecke (A auf C); d.h. man faltet die Mittelsenkrechte der gesuchten Diagonalen. Dann faltet man die Endpunkte dieser Faltlinie aufeinander ((P auf Q). Das hierbei entstandene Dreieck mit den Katheten im Verhältnis 1 : 2 bezeichnet man auch nach Platon als ***Elementardreieck Nr.3***



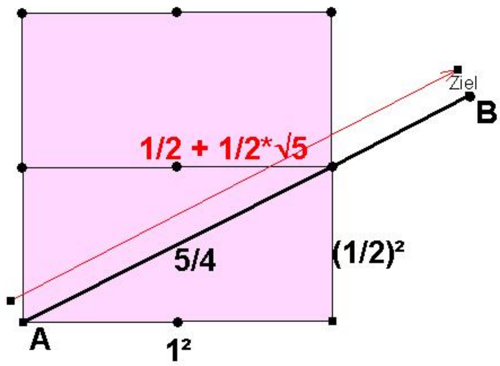
Zerlegt man ein Quadrat in vier solche Dreiecke, so kann man sie zum ***Quadrat mit Loch*** umlegen und damit etwa ausgehen vom 10 * 10 Quadrat die Länge der Diagonale g berechnen:

$x^2 = 100 + 25 = 125$

$x = 10*(\frac{1}{2} * \sqrt{5})$

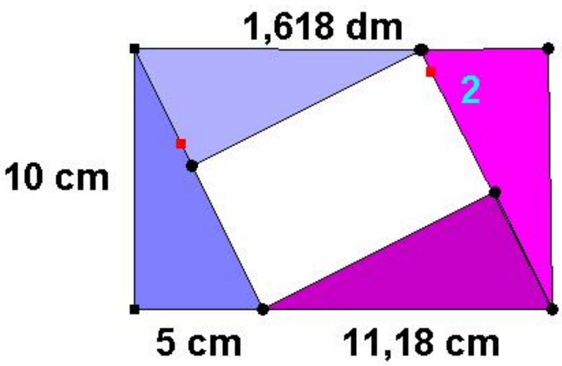


Eine zweite Möglichkeit:
Das aus dem 10 * 10 Quadrat gelegte Quadrat mit Loch g² hat einen Flächeninhalt von 225 cm². Das Loch ist dann 125 cm² groß. Also suche ich die Zahl, die mit sich multipliziert, 125 ergibt.
11 * 11 = 121;
bis 125 sind es 4/ 23 ≈ 1/6 = 0,166...
12 * 12 = 144.
√ 125 ≈ 11,16..
Ich nenne diese g-Linie im 10-er-Quadrat die ***11-er-Linie*** auch ***goldene Linie im Quadrat.***

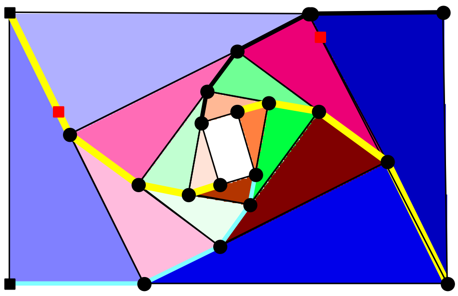


Verlängert man eine solche 11-er-Linie um die Hälfte einer Quadratseite, so erhält man eine Strecke, die zur Quadratseite im Verhältnis des goldenen Schnittes liegt. In „dm" gemessen: 1,616..., die Konstante des goldenen Schnitts..

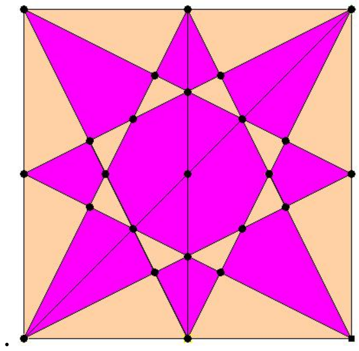
Beim Versuch, ein Quadrat mit Loch zu legen, ergibt sich mitunter folgende interessante Konfiguration: Ein ***goldenes Rechteck*** mit einem ***goldenen Loch.***



Spirale

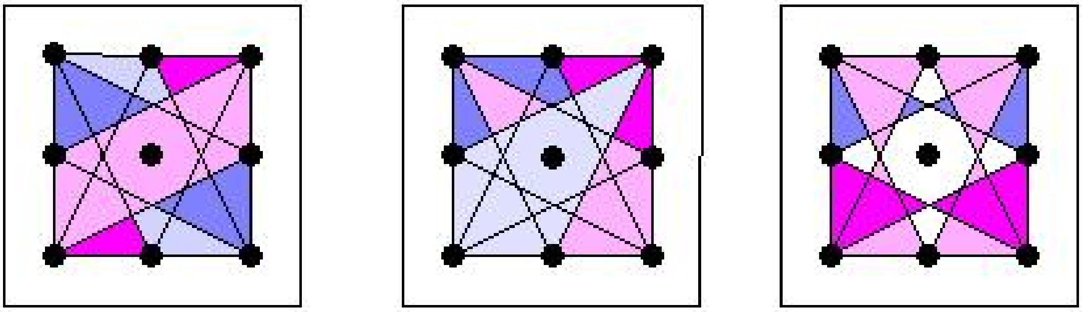


Dieses kann man wieder mit einer drehgestreckten Figur füllen. Die Endpunkt der Katheten liegen dann auf „richtigen" logarithmischen Spiralen
s: Hans Walser, Geometrische Spiele

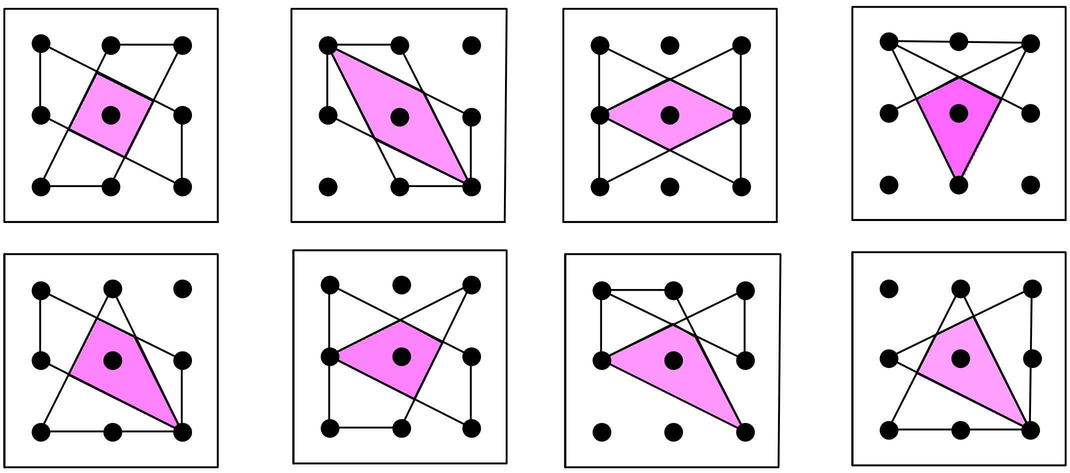


Zeichnet man in ein Quadrat alle möglichen goldenen Linien ein, so entsteht diese sogenannte „Knaut´sche Figur“. Wie viele goldene Linien gibt es eigentlich?
Auf dem 9-Nagel-Brett lassen sich diese Linien gut spannen. Wir können Sie durch verschiedene Figuren erzeugen:
das (5,11)-Parallelogramm, den (5,11)-Drachen und das (5,11)-überschlagene-Viereck (s.u.). Spannen wir nur zwei dieser Figuren, so entstehen von 11-er-Linien begrenzte Vierecke, die eine reiche Fülle von Aufgaben ermöglichen.

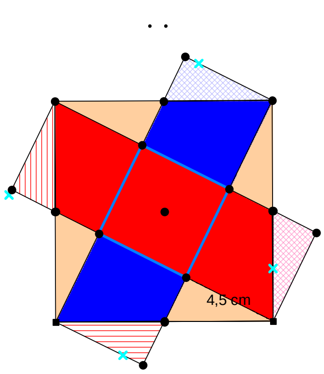
Diese drei Grundfiguren sollten Sie in die folgenden Figuren hineinsehen können:

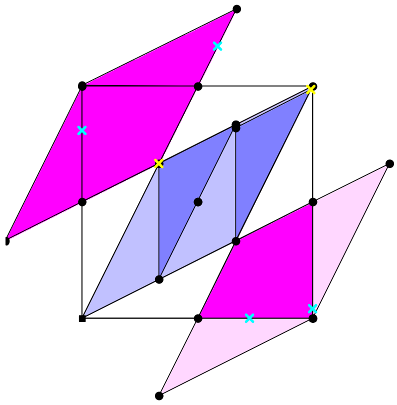


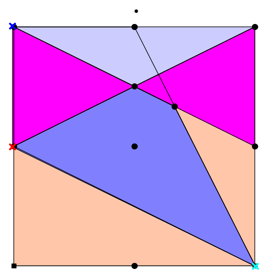
Bringt man nur zwei dieser Figuren zum Schnitt, so entstehen Vierecke. Diese können im Zusammenhang mit dem Haus der Vierecke untersucht werden. Auch ergeben sich Aufgaben zur Bruchrechnung : Es gibt insgesamt 10 Klassen von Figuren, die nur von Bruchteilen der g-Linien begrenzt sind



Hier sind die 8 großen Figuren erzeugt: Das Quadrat, die Raute über der Diagonalen, die Raute über der Mittellinie, der Drachen über der Mittellinie , der Drachen über der Diagonalen, zwei rechtwinklige Trapeze und ein Trapez. Ferner gibt es noch die beiden Drachen in Kleinformat. Suchen Sie diese selber!
Es bietet sich an, die Bruchteile abzuschätzen, die diese Vierecke jeweils bzgl. des 10 x 10 Quadrates als Flächeninhalt darstellen.. Man kann sie danach genau berechnen:





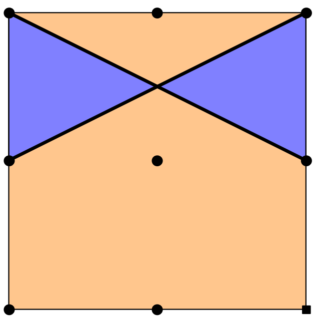


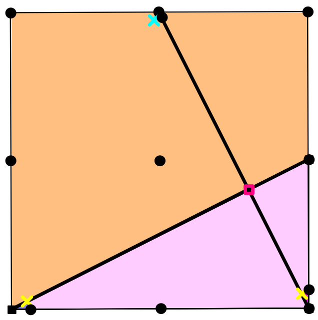
Finden Sie Bruchteile:
$^1/_2$, $^1/_5$, $^1/_{20}$, $^3/_{20}$, $^1/_3$, $^1/_6$, $^1/_{12}$, $^1/_2$, $^1/_8$, $^1/_4$, $^1/_{12}$, $^7/_{24}$,

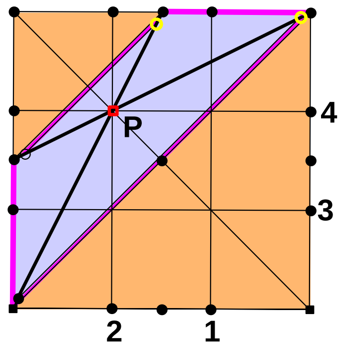
Die Schnittpunkte der goldenen Linien

Wir wollen im folgenden die Schnittpunkte der goldenen Linien bezüglich ihrer Lage im Gitternetz der 9 Punkte betrachte. Dabei gehen wir von dem Einheitsquadrat der Länge 1 (dm) aus.
Wir finden drei Klassen von Schnittpunkten: einmal halbieren sie sich (überschlagenes Viereck). Zum anderen können sie lotrecht aufeinander stehen und schließlich schneiden sie sich auf der Diagonalen.

Der Drittel-Punkt

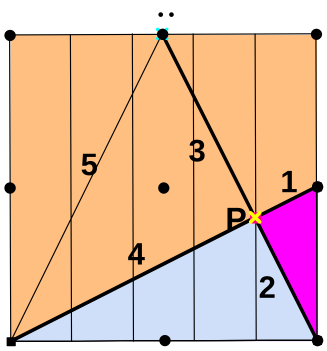






Den Schnittpunkt auf der Diagonalen können wir als Schnittpunkt der Diagonalen eines gleichschenkliges Trapezes interpretieren. In diese Figur können wir die Strahlensatzfigur sehen und stellen fest:
Im Trapez teilen die Diagonalen einander im Verhältnis der parallelen Seiten.
Der Schnittpunkt drittelt also alle Linien die von einer Quadratseite zur Gegenseite verlaufen; also auch die Quadratdiagonale und die zur Quadratseiten parallelen Querlinien. Ich nenne einen solchen Punkt daher ***Drittel-Punkt.***
Wenn wir einen solche Drittelpunkt (als Schnittpunkt zweier goldener Linien) kennen, sind wir in der Lage, ein Neunerfeld (3 x 3) zu falten. Dazu sehen wir in die Figur einen Doppelstreifen (rechts von P), den wir zunächst halbieren: Also entferntere Kante auf den Drittelpunkt falten, dann erst die Faltlinie durch den Drittelpunkt. Diese wird also zuletzt! gefaltet.

Der Fünftel-Punkt



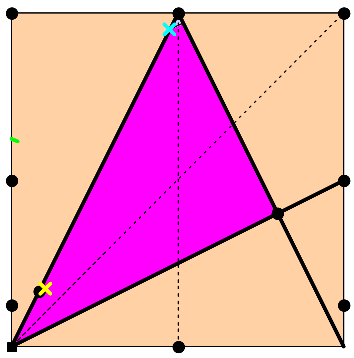
Stehen die goldenen Linien lotrecht aufeinander, so sehen wir ein rechtwinkliges Dreieck, das diagonal halbierte Doppelquadrat; ein Dreieck mit den Katheten im Verhältnis 1 : 2. Dieses wird durch die Höhe (zweite g-Linie) in zwei zum Ausgangsdreieck ähnliche Dreiecke geteilt mit 1 : 2 = 2 : 4. Also teilen die g-Linien sich im Verhältnis 1 : 4 bzw. 2 : 3.

Allgemein gilt: die Höhe auf die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck teilt diese im Quadrat der Katheten.

Wieder können wir diesen Punkt nutzen um nun ein 5 x 5 Feld zu falten. Links vom Schnittpunkt müssen 4 Streifen liegen. Linke Kante auf P. Dann den linken Doppelstreifen halbieren. Nun können wir von rechts vier Streifen sehen, die wir halbieren. Als letztes wird die Faltlinie durch P gefaltet.

Das ägyptische Dreieck

..



Ergänzen wir diese Figur durch eine zusätzliche goldene Linie. Auf dieser sind dann entsprechend 5 Längeneinheiten zu finden und wir haben ein rechtwinkliges pythagoräisches (3,4,5) - Dreieck, ein ägyptisches Dreieck.

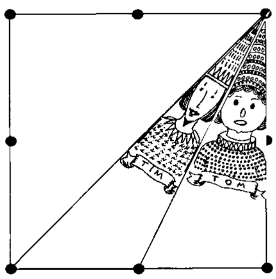
Welche Merkmale ermöglichen uns nun ein solches Dreieck zu identifizieren?. Wenn wir die Seitenverhältnisse kennen, sind wir aus dem Schneider. Was aber, wenn wir diese nicht analysieren können? Versuchen wir es mit den Winkeln. Diese sind leider sehr krumm.

$\arctan(4/3) = 53{,}130...°$

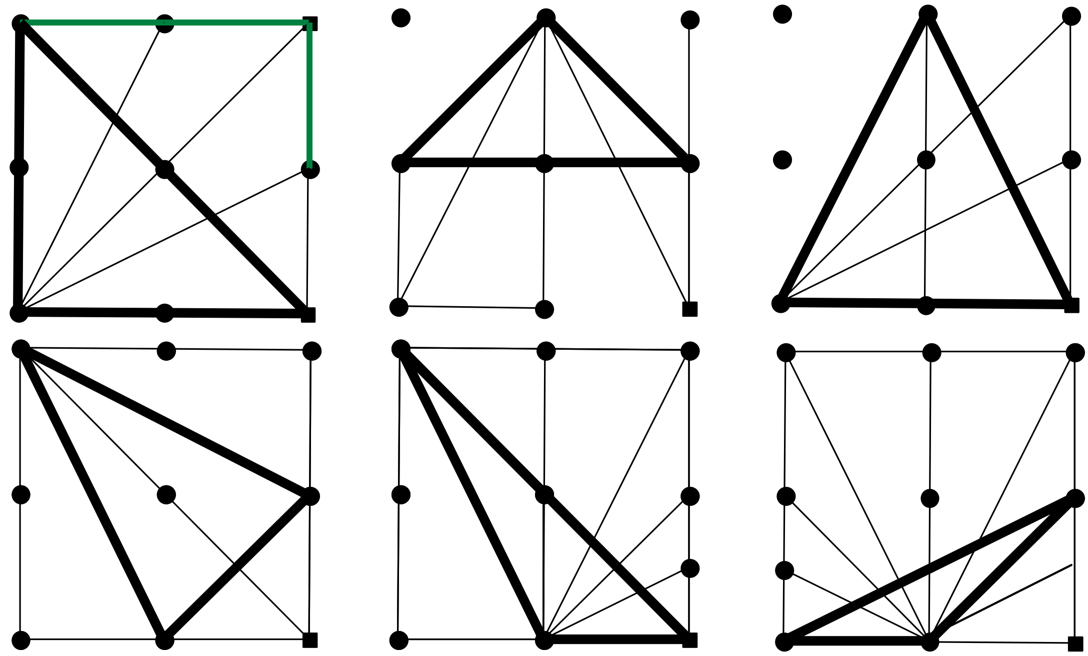
$\arctan(3/4) = 36{,}869...°$

Diese Winkel lassen sich aber sehr gut auf dem 9-Nagel-Geobrett untersuchen

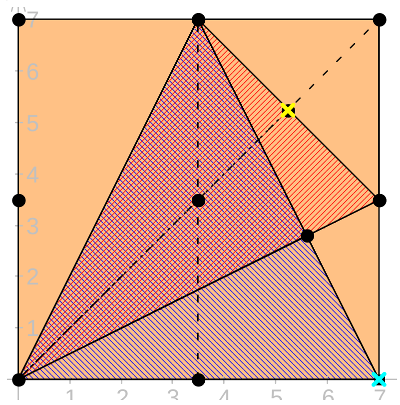
Die Winkel auf dem 9-Nagel-Geobrett



Analysieren wir die Winkel auf dem 9-Nagel-Geobrett, so stellen wir fest, es gibt 10 Klassen gleich großer Dreieckswinkel. Diese lassen sich alle als Linearkombination von den zwei spitzesten Winkeln darstellen. Ich nenne sie (zur besseren Lautierung) Tim und Tom (i und o). Tim ist der spitzeste und er ergänzt sich mit Tom zu ½ R. Ich habe diesen Sachverhalt in dem Vortrag „Tim und Tom , die Winkelwichtel“ 2005 in Bielefeld dargelegt.

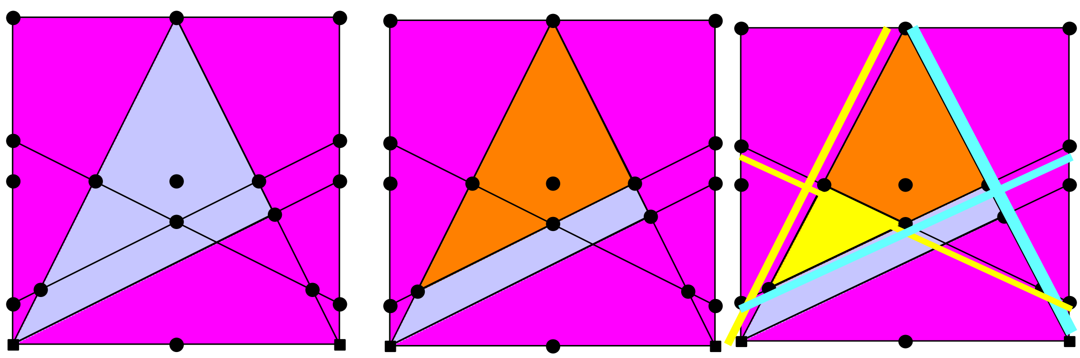


Identifizieren Sie die Teilwinkel in der obigen Darstellung selber. Wo ist der Winkel ooiio zu finden? Wie heißt dann der 1. rechte Winkel? Wie der zweite? Wie heißt der spitze Winkel im (7,11,11)-Dreieck? Wo finden Sie einen Tom-Tom-Winkel? Man kann von dieser Fragestellung ausgehend, die Winkelsumme im Dreieck als Folge von zwei Rechten Winkeln oiiooiio darstellen.
Weitere Hinweise: http://madin.tu-bs.de/homepage/steibl/wichtel/wichtel0.html

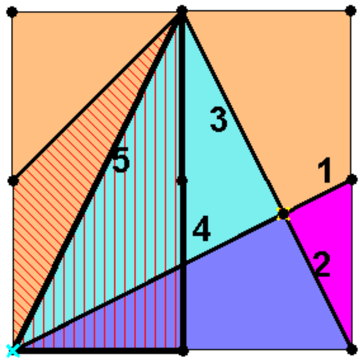


Betrachten wir unter diesem Aspekt unser ägyptisches Dreieck. Es entsteht hier als Schnitt zweier gleichschenkligen Dreiecke. Die beiden Winkel an der Spitze werden durch die Winkelhalbierenden (Diagonale bzw. Mittelinie des Quadrates) halbiert. Unser Dreieck hat also einen Tim-Tim-Winkel und einen Tom-Tom-Winkel.

Genau dann ist ein rechtwinkliges Dreieck ein ägyptisches Dreieck, wenn ein *Tim-Tim-Winkel* oder einen *Tom-Tom-Winkel* nachweisbar ist.



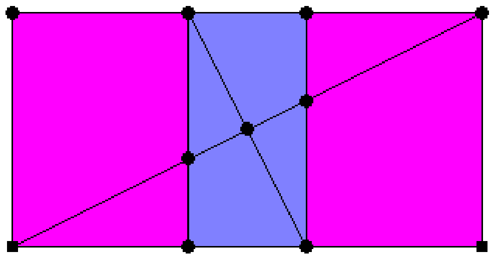
Es ist offensichtlich: Unser Dreieck , das von den beiden Mittelsenkrechten und einer goldenen Linie gebildet wird, ist den anderen beiden ägyptischen Dreiecken ähnlich. Es hat einen Tim-Tim-Winkel und einen Tom-Tom-Winkel, Man kann dies auch über folgenden Satz zeigen:
Zwei lotrecht aufeinander stehende Geradenpaare schneiden sich unter gleichen Winkeln.



Bei dieser Analyse der Winkel fällt folgender trigonometrischer Zusammenhang auf:
Die Größe des Tom-Winkels ergibt sich, wie man leicht sieht, mit Tom = arctan (½) = 26,56...°. damit ist TomTom=53,13..°.
Um den Winkel Tim zu bestimmen, müssen wir Tom zu 45° ergänzen.
Also gilt: Tim = 18,43.. ° und damit TimTim = 36,869°.
Wir haben damit auch gezeigt:
2 * arctan(½) = arctan($^4/_3$)

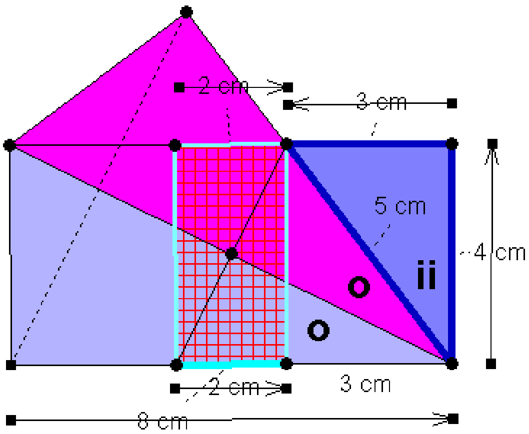
Die durch eine Diagonale und ihre Mittelsenkrechte bestimmte Drehstreckung eines Rechtecks

Beim Falten eine Diagonale im Rechtecks a * b (lang mal kurz) haben wir zunächst deren Mittelsenkrechte und dann die Diagonale gefaltet. Wir vertauschen nun die Funktionen dieser Linien, d.h. wir deuten die Mittelsenkrechte als Diagonale eines Rechtecks und die Diagonale des ursprünglichen Rechtecks als Mittelsenkrechte dieser Diagonale. Damit ist eine Drehstreckung definiert mit α = 90° und k = $^b/_a$. Das drehgetreckte Rechteck ist also dem Ausgangsrechteck ähnlich.



Ist das Verhältnis der Seitenlängen ganzzahlig auszudrücken, so ist das Seitenverhältnis des drehgetreckten Rechteck ebenfalls rational, d.h. ich kann es so erweitern , dass es ganzahlig wird. Im Beispiel habe wir ein Doppelquadrat, also ein Verhältnis 2 : 1, damit ergibt sich für das drehgestreckte Rechteck rechnerisch das Verhältnis 1 : ½ . Als Verhältnisgleichung geschrieben 2 : 1 = 1 : ½ . Das kann ich erweitern und ganzzahlig ausdrücken 4 : 2 = 2 : 1
Allgemein gesprochen: Ist das Verhältnis der Rechteckseiten rational, so auch das des drehgestreckten Rechtecks.
Liegt ein irrationales Verhältnis vor, wie etwa beim DIN-Format, so ist dann auch das Verhältnis des drehgetreckten Rechteck irrational: √2 : 1 = 1 : ½ * √2 .
Jedes ***rationale Verhältnis*** lässt sich aber so **erweitern,** dass es **ganzzahlig** wird.

Falten wir das Doppelquadrat längs der Diagonale, so bleibt hier rechts ein Dreieck offen, das sich als ägyptisches Dreieck entpuppt. Gehen wir von einem 8 * 4 Rechteck aus (Begründung s. u.), so sind die Maße des drehgestreckten Rechtecks 4 * 2.

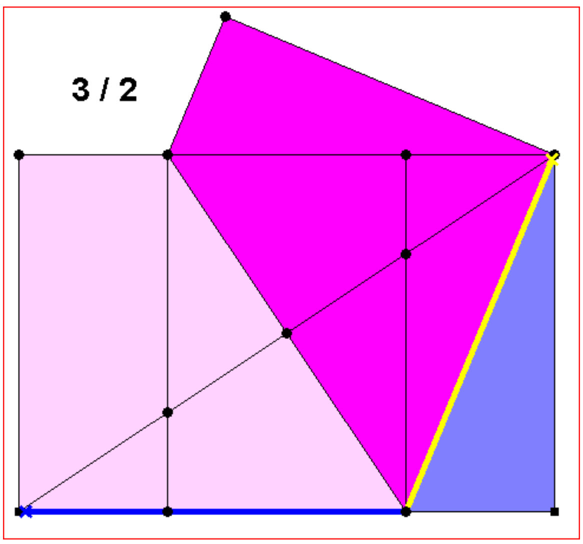


Für die kurze Kathete des Dreieck bleiben dann ½ * (8 – 2) = 3 übrig. Die Hypotenuse des frei bleibenden Dreiecks ergibt sich durch Spiegelung an der Diagonalen des großen Rechtecks aus den Strecken der Abschnitte 2 + 3.
Aber auch die Betrachtung der Winkel zeigt bereits, dass es sich um ein ägyptisches (3, 4, 5)-Dreieck handelt. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass wir mit dieser Methode alle pytagoräischen Zahlentripel erzeugen können (s. Hans Walser)

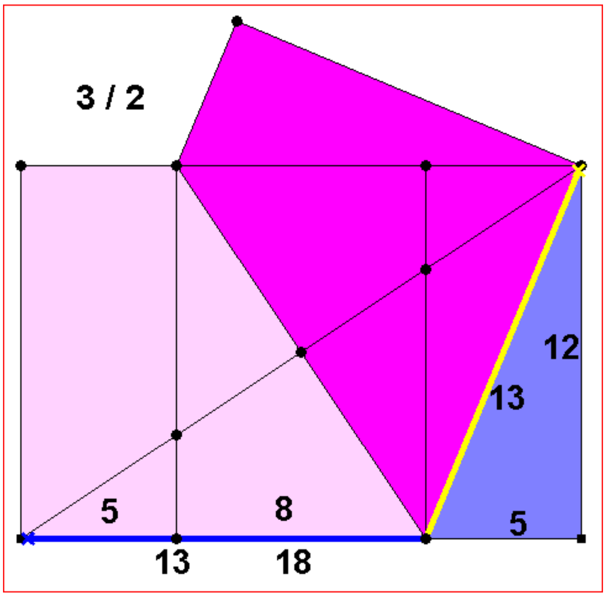
Die Erzeugung der pytagoräischen Zahlentripel durch Faltung von Rechtecken mit rationalem Seitenverhältnis

Gehen wir also von einem Rechteck mit rationalen Seitenverhältnissen aus, so sind die Seitenlängen des drehgestreckten Rechteck auch rational und die bei der Faltung frei bleibende Dreiecksseiten ebenfalls. Wir fragen uns nun, wie müssen wir ein derartiges Rechteck bemessen, um an den Längen die ganzzahligen pytagoräischen Tripel ablesen zu können.

Das indische Dreieck



Hier gehen wir von einem Rechteck mit dem Seitenverhältnis 3 : 2 aus. Vertauschen wir die Funktionen der Diagonalen und ihrer Mittelsenkrechten, so erhalten wir ein drehgestrecktes ähnliches Rechteck , das ebenfalls ein Verhältnis von 3 : 2 aufweist.
Also gilt
3 : 2 = 2 : (2/3)*2 d.h. 3 : 2 = 2 : $^4/_3$
Erweitern wir dieses Doppelverhältnis mit der größeren Zahl des Seitenverhältnisses des Rechtecks, damit es ganzzahlig wird, hier also mit 3.
9 : 6 = 6 : 4.

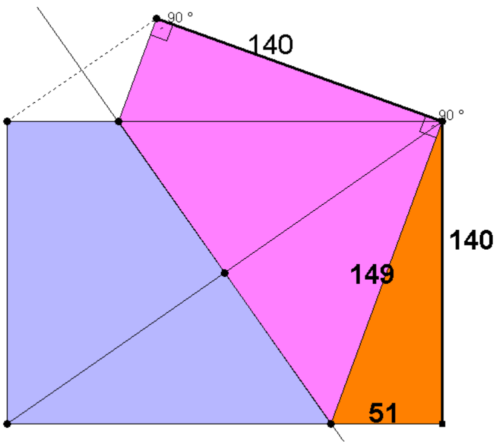


Gehen wir nun von einem Rechteck 9 x 6 aus so bleiben für den linken und rechten Abschnitt der langen Rechteckseite (9 - 4) / 2 = 2 $^1/_2$ Also erweitern wir noch einmal mit 2 und kommen zu einem Rechteck von 18 x 12 und dem pythagoräischen Dreieck (5 : 12 : 13), dem sogen. "indischen Dreieck." Die 13 ergibt sich dabei auch als 8 + 5 = 13, an der Diagonale des streck-gedrehten Rechtecks gespiegelt. Die Hypotenuse ergibt sich immer als Summe des mittleren und rechten (oder linken) Abschnittes der größeren Rechteckseite.

Sind u und v die Parameter des Verhältnisses der Rechteckseiten, so habe ich also mit 2u erweitert.
Bei dem Verhältnis **2 : 1** führte das zu **8 cm x 4 cm** . Bei ***4 : 1*** ergäbe sich ***32 cm x 8 cm*** , hier bei ***3 : 2*** auf ***18 cm x 12 cm***.
Versuchen Sie es einmal mit dem Verhältnis 7 : 4. Zu welchem Rechteck kommen Sie. Zeichnen Sie in mm und überprüfen Sie das Zahlentripel.

Einschränkungen

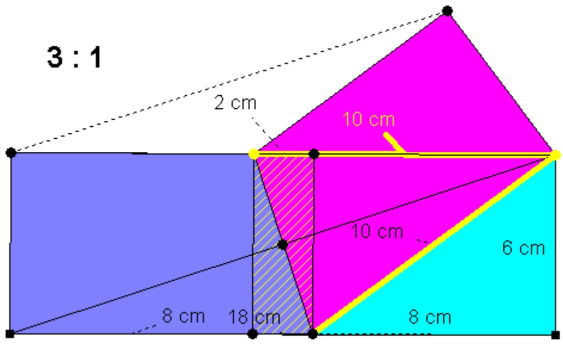
Leider sind wir noch nicht ganz am Ende der Fahnenstange. Versuchen Sie es einmal mit dem Verhältnis 3 : 1. Was fällt Ihnen dabei auf. Warum ist das Ergebnis nicht ganz befriedigend (siehe weiter unten) .
Umgekehrt können Sie natürlich auch von einem Zahlentripel ausgehen und das entsprechende Rechteck konstruieren und die Verhältniszahlen suchen. Versuchen sie es einmal mit dem Tripel (51, 149, 140)



Hier die Konstruktionsbeschreibung:

Zunächst zeichnen wir das Dreieck (in mm), dann den gefalteten Teil des Rechtecks. Rechten Winkel an die Seite 149, Länge 140 abtragen. Zweiten rechten Winkel. Schnittpunkt mit der Parallele zu 51. Damit ergibt sich die Diagonale des drehgestreckten Rechtecks. 51 um 149 verlängern. Damit hat das Rechteck die Maße 200 x 140. Mit 20 gekürzt, ergeben sich die Parameter als 10 zu 7.

Haben Sie es einmal mit 3 : 1 versucht? Sie erhalten zwar ein rechtwinkliges Dreieck, ein ägyptisches mit den Seitenlängen 6, 8, 10 . Wir wollen aber die Konstruktion eindeutig gestalten. Deshalb hier ohne Beweis noch folgende Hinweise.

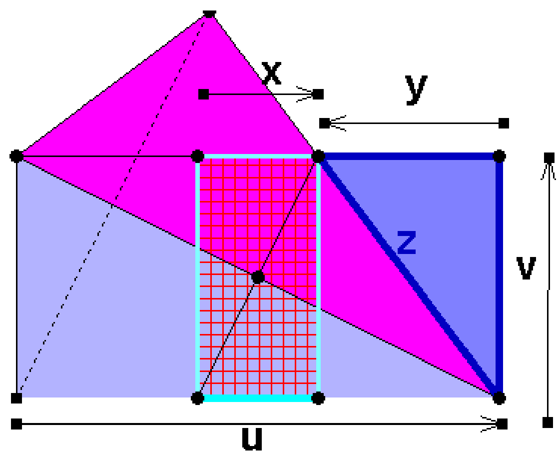


Das pythagoräische (3,4,5)-Dreieck haben wir im Rechteck mit den Verhältniszahlen u = 2 und v = 1 gefunden .
Aber auch das Rechteck mit u = 3 und v = 1 liefert dieses Dreieck , allerdings mit doppelt so langen Seiten. Hier habe ich auch mit dem Faktor 2u = 6 erweitert. Dabei hätte hier der Faktor u = 3 bereits genügt.

Bei einem pythagoräischen Zahlentripel $a^2 + b^2 = c^2$ sind die Maßzahlen der Längen der Katheten immer eine gerade Zahl und eine ungerade Zahl. Die Hypotenuse hat immer eine ungerade Maßzahl. Die Kathete mit ungerader Maßzahl lassen wir immer auf der langen Rechteckseite erscheinen. Dann ergibt sich für die Hypotenuse eine ungerade Zahl und die Konstruktion ist eindeutig. Hier ist die "gerade" Kathete aber auf der langen Rechteckseite. Deshalb hätten wir nicht mit 2 zu erweitern brauchen. Um diese Fälle zu vermeiden, muss man für die Verhältniszahlen u und v fordern (u, v) gekürzt und ***u* - *v* nicht gerade**.

Berechnung der Parameter

Allgemein ergibt sich folgende Rechnung:



Die kurze Seite x des drehgestreckten Rechtecks berechnet sich zu
$\mathbf{x = v * {}^{v} / {}_{u} = {}^{v^2}/_{u}}$
Damit ergibt sich für den Abschnitt y
$\mathbf{y = {}^{1}/_{2}\,(u - x) = {}^{1}/_{2}\,(u - {}^{v^2}/_{u})}$

Die Kathete z ergibt sich aus
$\mathbf{z = x + y = ({}^{v^2}/_{u}) + {}^{1}/_{2}\,(u - {}^{v^2}/_{u})}$

Setzen wir die Seiten y, v und z des pythagoräischen Dreiecks ins Verhältnis:

$$\mathbf{y : v : z = {}^{1}/_{2}\,(u - {}^{v^2}/_{u}) \quad : \quad v \quad : \quad (({}^{v^2}/_{u}) + {}^{1}/_{2}\,(u - {}^{v^2}/_{u}))}$$

“erweitern“ wir diese Terme mit 2u so ergibt sich

$$\mathbf{y : v : z = (u^2 - v^2) \quad : \quad (2*u*v) \quad : \quad (u^2 + v^2)}$$

(s. Dickson 1966 und ich bedanke mich bei Hans Walser für diese Hinweise)

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Hans Walser, (20060812) Trigonometrie im Schachbrett
Hans Walser, pythagoräische Dreiecke, 8th International Conferenc on Geometrie Part 2´
Hans Walser, (20060408b) Falten von Rechtecken
Alfred Hoehn, Der wiedergefundene Schatz
Horst Steibl, Das Geobrett im Unterricht, Franzbecker, 2006
Horst Steibl, Geometrie aus dem Zettelkasten, Franzbecker, 1999
http://www.madin.tu-bs.de/homepage/**steibl**/Startseite.html